<u>Методы решение уравнения</u>

Использование понятия области определения функции

Областью определения функции $y=f(x)$ называется множество значений переменной x, при которых функция имеет смысл.

Пусть дано уравнение $f(x)=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$- элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2. Тогда областью D допустимых значений уравнения будет множество, состоящее из тех значений x, которые принадлежат обоим множествам, то есть $D=D_1 \cap D_2$. Ясно, что когда множество D пустое ($D=\emptyset$), то уравнение решений не имеет.

1. $\arcsin(x+2)+2x-x^2 = x-2$.

ОДЗ: $-1\leq x+2\leq 1$, $x^2-x\geq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq -1$, $0\leq x\leq 2 \Rightarrow$ решений нет.

Ответ: решений нет.

Часто оказывается достаточным рассмотреть не всю область определения функции, а лишь ее подмножество, на котором функция принимает значения, удовлетворяющие некоторым условиям (например, только неотрицательные значения).

Использование понятия области значений функции

Областью значений функции $y= f(x)$ называется множество значений переменной y при допустимых значениях переменной x.

Функция $y=f(x)$ называют ограниченной снизу (соответственно сверху) на множестве X, если существует такое число M, что на X выполняется неравенство $f(x)\geq M$ (соответственно $f(x)\leq M$).

Функция $y=f(x)$ называется ограниченной на данном промежутке (содержащемся в области ее определения), если существует такое число $M>0$, что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство $f(x)<m$.

Пусть дано уравнение $f(x)=g(x)$, где $g(x)$ - элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2. Обозначим область изменения этих функций соответственно E_1 и E_2. Если $x1$ является решением уравнения, то будет выполняться числовое равенство $f(x_1) = g(x_1)$, где $f(x_1)$ значение функции $f(x)$ при $x=x_1$, а $g(x_1)$ - значение функции $g(x)$ при $x=x_1$. Значит, если уравнение имеет решение, то области значений функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют общие элементы ($E_1 \cap E_2=\emptyset$). Если же таких общих элементов множества E_1 и E_2 не содержат, то уравнение решений не имеет.

Пусть дано уравнение $f(x)=g(x)$. Если $f(x)\geq 0$ и $g(x)\leq 0$, то решением уравнения является решение системы $f(x)=0, g(x)=0$.

1. $x^2+2x\sin x\cdot y+1=0$.

Решение. В левой части есть единица, значит, можно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством: $x^2+ 2x\cdot \sin xy+ \sin^2 xy+\cos^2 xy=0$.

Сумма первых трех членов представляет собой полный квадрат: $(x+\sin xy)^2 +\cos^2 xy =0$.

Следовательно, в левой части сумма квадратов, она равна нулю тогда, когда одновременно равны нулю выражения, стоящие в квадратах. Запишем систему: $\cos xy=0$, $x+\sin xy=0$.

Если $\cos xy=0$, то $\sin xy=\pm 1$, поэтому эта система равносильна совокупности двух систем: $x+1=0$, $\cos x\cdot y=0$ или $x-1=0$, $\cos x\cdot y=0$.

Их решениями являются пары чисел $x=1$, $y=\pi / 2 + \pi\cdot m$, $m\in Z$, и $x=-1$, $y = = \pi /2 + \pi\cdot m$, $m\in Z$.

Ответ: $x=1$, $y=\pi /2 + \pi\cdot m$, $m\in Z$, и $x=-1$, $y=\pi / 2 + \pi\cdot m$, $m\in Z$.

Если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно на промежутке X системе уравнений $f(x)=A, g(x)=A$.

2. Решить уравнение $(\log_2 3)x+a+2 = (\log_9 4)x^2+a^2-6a-5$.

Решение. Воспользовавшись очевидными неравенствами

$1\leq(\log_2 3)x+a+2=(\log_2 3)-x^2+a^2-6a-5\leq 1$, заключаем, что обе части уравнения должны равняться 1, что приводит к системе $x+a+2=0, 0=x^2+a^2-6a-5$. $\Leftrightarrow x=-a+2, 2a^2-2a-1=0$ и, следовательно, $x=-5+32$, если $a=1+32$ и $x=-5+32$, если $a= 1-32$. Ответ: $x=-5+32$, если $a=1+32$ и $x=-5+32$, если $a=1-32$.

Использование свойства монотонности функции

Функцию $y=f(x)$ называют возрастающей (соответственно убывающей) на множестве X, если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.Иными словами, функция $y=f(x)$ возрастает на множестве X, если из $x_1\in X$, $x_2\in X$ и $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)<f(x_2)$.

Она убывает на этом множестве, если из $x_1\in X$, $x_2\in X$ и $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)> f(x_2)$.

Функцию $y = f(x)$ называют нестрого возрастающей (соответственно нестрого убывающей) на X, если из $x_1\in X$, $x_2\in X$ и $x_1<x_2$ следует: $f(x_1)<=f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)>=f(x_2)$).

Функции, возрастающие и убывающие на X, называют монотонными на X, а функции, нестрого возрастающие или не строго убывающие на X, называют нестрого монотонными на X.

Для доказательства монотонности функций используются следующие утверждения:

1. Если функция f возрастает на множестве X, то для любого числа C функция f+C тоже возрастает на X.

2. Если функция f возрастает на множестве X и C> 0, то функция Cf(x) тоже возрастает на X.

3. Если функция f возрастает на множестве X, то функция - f убывает на этом множестве.

4. Если функция f возрастает на множестве X и сохраняет знак на множестве X, то функция $\frac{1}{f}$ убывает на этом множестве.

5. Если функции f и g возрастают на множестве X, то их сумма f+g тоже возрастает на этом множестве.

6. Если функции f и g возрастают и неотрицательны на множестве X, то их произведение fg тоже возрастает на X.

7. Если функция f возрастает и неотрицательна на множестве X и n - натуральное число, то функция f^n тоже возрастает на X.

8. Если обе функции f(x) и g(x) возрастающие или обе убывающие, то функция h(x)=f(g(x)) - возрастающая функция. Если одна из функций возрастающая, а другая убывающая, то h(x)=f(g(x)) - убывающая функция.

Сформулируем теоремы об уравнениях.

Теорема 1. Если функция f(x) монотонна на промежутке X, то уравнение f(x)=C имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 2. Если функция f(x) монотонна на промежутке X, то уравнение f(g(x))=f(h(x)) равносильно на промежутке X уравнению g(x) = h(x).

Теорема 3. Если функция f(x) возрастает на промежутке X, а g(x) убывает на промежутке X, то уравнение g(x)=f(x) имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 4. Если функция f(x) возрастает на промежутке X, то уравнение f(f(x))=x равносильно на промежутке X уравнению f(x)=x.

Примеры.

1. Найдите все значения a, при которых имеет ровно три корня уравнение

$$4\text{-}x\text{-}a\log_3(x^3-2x+3)+2-x^2+2x\log_3(2x-a+2)=0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $2x^2-2x\log_3(x^3-2x+3)= 22x-a-1\log_3(2x-a+2)$.

Если положить $u = x^2-2x$, $v=2x-a-1$, то придем к уравнению$2u\log_3(u+3)= 2v\log_3(v+3)$.

Функция $f(t)=2t\log_3(t+3)$ монотонно возрастает при $t >-2$, поэтому от последнего уравнения можно перейти к равносильному $u = v$, $x^2-2x = 2x-a-1 \Leftrightarrow (x-1)^2=2x-a$.

Это уравнение, как видно из рисунка, имеет ровно три корня в следующих случаях:

1) Вершина графика функции y=2x-a располагается в вершине параболы $y= (x-1)^2$, что соответствует a=1;

2) Левый луч графика y=2x-a касается параболы, а правый пересекает ее в двух точках; это возможно при a=12;

3) Правый луч касается, а левый - пересекает параболу, что имеет место при a=32.

Поясним второй случай. Уравнение левого луча y=2a-2x, его угловой коэффициент равен -2. Следовательно, угловой коэффициент касательной к параболе равен

$2(x-1)=-2 \Rightarrow x=0$ и точка касания имеет координаты (0;1). Из условия принадлежности этой точки лучу находим a=12.

Третий случай можно рассмотреть аналогично или привлечь соображения симметрии.

Ответ: 0,5; 1;1,5.

Использование свойств выпуклости

Пусть функция f(x) определена на промежутке X она называется строго выпуклой вниз (вверх) на X, если для любых u , v из X и 0< λ<1 справедливо неравенство

$f(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$, (соответственно, $f(\lambda u + (1-\lambda)v) > \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$).

Геометрически это означает, что любая точка хорды BC (то есть отрезка с концами в точках B(u;f(u)) и C(v;f(v)), отличная от точек B и C, лежит выше (ниже) точки A графика функции f(x), соответствующей тому же значению аргумента.

Функции строго выпуклые вверх и вниз называются строго выпуклыми.

Справедливы следующие утверждения.

Примеры.

1. 41- sin4x + 41- cos4x = 412.

Решение. Если положим $f(x)= 41-x^2$, u=cos2x, v=sin2x, u1=v1=12, то данное уравнение запишется в виде (1). Поскольку $f'(x)= -x24(1-x^2)^3$, f''x=-2+x244(1-x2)7, то функция f(x) является строго выпуклой вверх на сегменте -1;1. Очевидно, что выполнены остальные условия теоремы 2 и, следовательно, уравнение равносильно уравнению cos2x = 0,5, $x=4\pi +2k\pi$, где $k\in Z$.

Ответ: $x=4\pi +2k\pi$, где $k\in Z$.

Теорема 3.Пусть функция f(x) является строго выпуклой на промежутке X и u,v, $\lambda v+(1-\lambda)u\in X$. Тогда равенство $f(\lambda v+(1-\lambda)u) = \lambda f(v)+(1-\lambda)f(u)$ (4) справедливо в том и только и том случае, если либо u=v, либо λ=0, либо λ=1.

Примеры: $\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x\cdot 1+\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x= \sin 2x\cos 3x1+\cos 3x+\cos 2x\sin 3x1+\sin 3x$.

Решение. Уравнение имеет вид (4), если $f(x)=x1+x= x+x2$, $u=\sin 3x$, $v= \cos 3x$, $\lambda=\sin 2x$.

Очевидно, что функция f(x) является строго выпуклой вниз на R. Следовательно, по теореме 3 исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x=0$, $\sin 2x=1$, $\cos 3x=\sin 3x$.
Отсюда получаем, что его решениями будут $2k\pi$, $12\pi + 3n\pi$, где $k,n\in Z$.

Ответ: $2k\pi$, $12\pi + 3n\pi$, где $k,n\in Z$.

Использование свойств выпуклости применяется при решении и более сложных уравнений.

Использование свойств четности или нечетности функций

Функция f(x) называется четной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение - x также принадлежит области определения и выполняется равенство f-x= fx. Функция fx называется нечетной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение - x также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x)=- f(x)$.

Из определения следует, что области определения четной и нечетной функций симметричны относительно нуля (необходимое условие).

Для любых двух симметричных значений аргумента из области определения четная функция принимает равные числовые значения, а нечетная - равные по абсолютной величине, но противоположного знака.

Теорема 1.Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

Теорема 2. Произведение и частное двух нечетных функций представляют собой четные функции.

Пусть имеем уравнение $F(x)=0$, где $F(x)$ – четная или нечетная функция.

Чтобы решить уравнение $F(x)=0$, где $F(x)$ - четная или нечетная функция, достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, симметричные полученным, и для нечетной функции корнем будет $x=0$, если это значение входит в область определения $F(x)$. Для четной функции значение $x=0$ проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.

Примеры.

1. $8^x=2^{x+2} – x + 2$.

Решение. В обеих частях уравнения имеем четные функции. Поэтому достаточно найти решения для $x\geq 0$. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, рассмотрим два промежутка: $(0;2)$, $(2;\infty)$.

а) На промежутке (0;2 имеем: $8^x=2x+2-x+2$, $2^{3x}=24$, $x=43$.

b) На промежутке $(2;\infty)$ имеем: $8^x=2^{x+2}+x-2$, $3x=22x$, $x=0$.

Но так как $x=0$ не является корнем уравнения, то для $x>0$ данное уравнение имеет корень $x=43$. Тогда $x=- 43$ также является корнем. Ответ: 43; - 43.

1. Решите систему уравнений: $[x]y=1000$. $[y]x=1996$

Решение. Легко видеть, что $[x]\neq 0$; $[y]\neq 0$.

Рассмотрим два случая:

а) $x\geq 1 \Rightarrow y=1000 / [x]$, $[y]=1996 / x$

Мы знаем: $[y]\leq y$ и $x < x +1 \Rightarrow [1996] / [x]+1 < 1000 / [x] \Rightarrow [x] = 1$, $y=1000$, $x=499/250$.

б) $x < 0 \Rightarrow [x]=1000 / y$, $x=1996 / [y]$

Мы знаем: $y < [y] +1$ и $[x]\leq x$;

а) если $[y] \neq -1 \Rightarrow 1000 / [y]+1 < 1000 / y =[x] \leq x=1996 / [y] \Rightarrow [y] > 1996/996 >- 3 \Rightarrow [y] -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=[x] = - 998$; $y= - 1000 / 998 = - 500 / 499$;

б) если $[y] = -1 \Rightarrow x= [x]=-1996 \Rightarrow y = -1000 / 1996 = -250 / 499$.

Ответ: (499 / 250 ; 1000) ; (- 998; -500 / 499); (-1996; -250 /499) .

2. Решите уравнение $2^{[x} = 1 + 2x^{]}$, где [x] - целая часть числа x.

Решение. Преобразуем исходного уравнение в $2^{[x] - 1} = \frac{1}{2}+[x]+\{x\}$.

При $[x] \leq 2$, $2^{[x] - 1} > \frac{1}{2}+[x]+\{x\}$ (*), так как правая часть отрицательная. Докажем при помощи метода индукцией по [x], что при $[x] \geq 4$ неравенство также выполняется (*). Переход индукции: Пусть при неком [x] имеет место $2^{[x] - 1} = \frac{1}{2}+[x]+\{x\}$.

Докажем верность: $2^{[x] -+1-1} = \frac{1}{2}+[x]+1+\{x\}$.

Согласно перехода: $2^{[x]\,-} = 2\left(\frac{1}{2} + [x] + \{x\}\right) = \frac{1}{2} + [x] + \{x\} + \frac{1}{2} + [x] + \{x\} > \frac{1}{2}[x] + \{x\} + 4 > \frac{1}{2}[x] + \{x\}$. Осталось проверит случай. Когда [x] = -1; 0; 1; 2; 3. Перебирая их, находим ответы: x = $-\frac{1}{4}$, x = 0, x = $\frac{7}{2}$.

3. Найти натуральные корны уравнения 17(xyzt + xy + xt + zt + 1) – 54(yzt + y + t).
Решение. Решим уравнение относительно x: 17x = 54 – 17(zt + 1) : (yzt + y + t).
Отсюда 54 – 17x = $\dfrac{17}{y + \dfrac{t}{zt+1}}$. Правая часть этого уравнения целая, и положительная, так как x. y, z, t - натуральные числа. Поэтому $x \le 3$.
При x=1 левая часть уравнения равна 37, при x=2 равна 20б при x=3 равна 3.Теперь можно решить в натуральных числах уравнения:

$$37=\frac{17}{y + \dfrac{t}{zt+1}}, \qquad (1)$$

$$20=\frac{17}{y + \dfrac{t}{zt+1}}, \qquad (2)$$

$$3=\frac{17}{y + \dfrac{t}{zt+1}} \qquad (3)$$

Из уравнения (1) получаем 37t : (zt + 1) = 17 – 37y. Так как $y \ge 1$ правая часть уравнения отрицательна, то это уравнения не имеет натуральных решений.
Аналогично уравнение (2) также не имеет натуральных корней.
Из уравнении (3) имеем 17 – 3y = 3☹z + 1/t). Очевидно, 0<3:(z+1/t)<3,. Поэтому 0<17-3y<3. Отсюда y=5. Тогда 3:(z+1/t)=2, т.е. z+1/t=1+1/2. Следовательно, z=1, t=2. Ответ: x=3, y=5, z=1, t=2.